CALCUL DIFFERENTIEL

Classification Thèmes de MégaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

Note sur la différentiabilité

1) $f : \mathbb{R} \to E$ où E evn de dim. finie

$df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, E)$ et l'on a $\boxed{f'(a) = df(a)(1)}$

(où $f'(a)$ désigne la dérivée de f en a, ie par déf. $f'(a) \doteq \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$)

Ainsi : $\boxed{df(a)(h) = h f'(a)}$ $\forall h \in \mathbb{R}$

preuve : La déf. de $df(a)$ s'écrit

$$\|f(a+h) - f(a) - df(a)(h)\| = o(\|h\|)$$

Mais $df(a)$ étant linéaire de $\mathbb{R}$ vers E, $df(a)(h) = h\, df(a)(1)$ d'où :

$$\left\| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - df(a)(1) \right\| = o(1)$$

ce qui signifie bien que $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = df(a)(1)$ ie $df(a)(1) = f'(a)$.

CQFD

2) E, F evn
Toute appl. linéaire $l : E \to F$ est différentiable, de différentielle au pt $x \in E$ elle-même, ie :

$$\forall x \in E \qquad dl(x) = l \in \mathcal{L}(E, F)$$

preuve : $\|l(a+h) - l(a) - l(h)\| = 0 = o(\|h\|)$

CQFD.

3) $f : E = E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ E_i, F evn

Si f différentiable en a, on sait que chacune des appl. partielles f_i de f en a définies par $f_i : E_i \longrightarrow F$, $x \longmapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$ est différentiable

et que, en notant $\partial_i f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ cette différentielle $df_i(a_i)$, on a :

$$\boxed{df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i} \qquad \forall h \doteq (h_1, \dots, h_n) \in E$$

On peut écrire : $h_i = dx_i(h)$ où $dx_i = pr_i = i^{-}$projection : $E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow E_i$

$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_i$

donc $$\boxed{\underbrace{df(a)}_{\in \mathcal{L}(E,F)} = \sum \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}_{\in \mathcal{L}(E_i,F)} \circ \underbrace{dx_i}_{\in \mathcal{L}(E,E_i)}}$$

pr_i étant linéaire, pr_i est différentiable et sa différentielle en a est pr_i : $d(pr_i)(a) = pr_i$, ce qui justifie la notation dx_i (pour pr_i)

• Cas où $E_1 = \dots = E_n = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$: On a 2 réductions possibles

a) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathcal{L}(E_i, F)$ s'écrit $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(h_i) = \underbrace{f_i'(a)}_{\in \mathbb{R}} . \underbrace{h_i}_{\in \mathbb{R}}$ (. = mult. dans $\mathbb{R}$)

où $f_i'(a)$ est le nbre dérivé de f_i en a.

On écrit encore $f_i'(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ pour simplifier.

Les formules préc. s'écrivent :

$$df(a)\,h = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) . h_i \quad (\times \text{ dans } \mathbb{R})$$

et $$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, dx_i$$

b) Si $(e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (ie $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \to i^{-}$place)

$dx_i = pr_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est égal à $e_i^* \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$.

$(dx_1, \dots, dx_n)$ est la base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ de E et $df(a) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, dx_i$ est l'expression du vecteur $df(a) \in E^*$ dans la base $(e_1^*, \dots, e_n^*)$.

$$df : \underset{\text{rapporté à la base } (e_1, \dots, e_n)}{E = \mathbb{R}^n} \longrightarrow \underset{\text{rapporté à la base duale } (e_1^*, \dots, e_n^*) = (dx_1, \dots, dx_n)}{E^*}$$

$$a \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

On constate que df est continue ssi chacune des appl. $\frac{\partial f}{\partial x_i} : E \to \mathbb{R}$ est continue. On retrouve une partie du Th. C^1 :

> $f : E = E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ est de classe C^1
> ssi chacune des dérivées partielles existent et est continue

On considère les applications :

$$N_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$N_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$. Chercher les points de $\mathbb{R}^n$ où ces applications sont différentiables, et exhiber la différentielle quand elle existe.

(réf. Serfati III.5.7)

1) Etude de N_2 : N_2 est continue (c'est une des normes canoniques de $\mathbb{R}^n$)

1re méthode : On cherche les dérivées partielles de N_2. Au point $x = (x_1, \dots, x_n)$, la i-ième application partielle est :

$$N_{2,i} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad t \longmapsto N_2(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) = \sqrt{t^2 + \sum_{j \neq i} x_j^2}$$

$N_{2,i}$ sera dérivable en $t = x_i$ ssi $x \neq 0$ et :

$$\frac{\partial N_2}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{\sqrt{\sum_j x_j^2}} = \frac{x_i}{N_2(x)}$$

L'application $\frac{\partial N_2}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \frac{x_i}{N_2(x)}$ est continue en tout point $x \neq 0$,

donc N_2 sera continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et :

$$dN_2(x)h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_2}{\partial x_i}(x) h_i = \sum \frac{x_i}{N_2(x)} h_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i h_i}{N_2(x)}$$

NB : Si $x = 0$, les dérivées partielles n'existent pas en 0 donc N_2 ne sera pas différentiable en 0.

2e méthode : On sait que toute appl. bilinéaire continue $f : E \times F \to H$, où E, F, H sont des evn, est différentiable et :

$$df(x,y)(h,k) = f(x,k) + f(h,y)$$

(ce qui montre, au passage, que $df : E\times F \to \mathcal{L}(E\times F, H)$ est linéaire donc C^∞, car : $d^2 f(x,y) = d(df)(x,y) = df$ donc $d^2 f : E\times F \to \mathcal{L}(E\times F, \mathcal{L}(E\times F, H))$, $(x,y) \mapsto df$ est une appl. constante, donc de différentielles de tous ordres nulles.)

Ici :

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{i} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{\sqrt{}} \mathbb{R} \quad (N_2 = \sqrt{} \circ f \circ i)$$

$$x \longmapsto (x, x)$$

$$(x, y) \longmapsto (x|y)$$

$$t \longmapsto \sqrt{t}$$

Si $x \neq 0$, $f \circ i(x) = (x|x) \neq 0$ et $\sqrt{}$ sera différentiable en $t_0 = (x|x)$. N_2 le sera aussi et :

$$dN_2(x) = d(\sqrt{})(x|x) \circ df(x,x) \circ \underbrace{di(x)}_{= i \text{ car } i \text{ linéaire}}$$

$$dN_2(x)h = d(\sqrt{})(x|x) \circ \underbrace{df(x,x)(h,h)}_{= 2f(x,h) = 2(x|h)}$$

Comme $(\sqrt{t})' = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$, on conclut :

$$\boxed{dN_2(x)h = \frac{1}{2\sqrt{(x|x)}} \cdot 2(x|h) = \frac{(x|h)}{\sqrt{(x|x)}}} \quad \text{dès que } x \neq 0$$

2) <u>Etude de N_1</u> : $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

N_1 est continue (c'est une norme canonique de $\mathbb{R}^n$). Fixons $x = (x_1, \dots, x_n)$ et exhibons la i-ème application partielle de N_1 en x :

$$N_{1,i} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto |t| + \sum_{j \neq i} |x_j|$$

$N_{1,i}$ est dérivable en tout point $t \neq 0$ et $N_{1,i}'(t) = \operatorname{Sgn} t = \dfrac{t}{|t|}$, donc N_1 sera dérivable par rapport à x_i en tout point x tel que $x_i \neq 0$, et :

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_i}(x) = \operatorname{Sgn} x_i = \frac{x_i}{|x_i|}$$

<u>Ccl</u> : N_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1 x_2 \cdots x_n = 0\}$ et

$$dN_1(x)h = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Sgn} x_i \, h_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i h_i}{|x_i|}$$ en tout pt de cet ouvert.

N_1 n'est pas différentiable en x tel que $x_1 x_2 \cdots x_n = 0$ car si $x_i = 0$, $\dfrac{\partial N_1}{\partial x_i}(x)$ n'existe pas !

Soient E et F deux Banach. Notons $Isom(E,F)$ le sev de $\mathcal{L}(E,F)$ formé des isomorphismes (ie des homéomorphismes linéaires) de E sur F.

a) Mq $Isom(E,F)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E,F)$

(Ind. Si $u_0 \in Isom(E,F)$, et u proche de u_0, on pourra écrire $u_0^{-1} \circ u = Id - v$ et chercher une condition sur u pour que $Id - v$ soit inversible ...)

b) Mq : $\varphi : Isom(E,F) \longrightarrow Isom(F,E)$

$$u \longmapsto u^{-1}$$

est continue (Ind. : Utiliser l'inverse de $1-u$ dans l'algèbre de Banach $\mathcal{L}(E)$ quand $\|u\| < 1$)

c) Mq φ est de classe C^1 dans l'ouvert $Isom(E,F)$, de différentielle :

$$d\varphi(u)\, h = u^{-1} \circ h \circ u^{-1} \qquad \forall h \in \mathcal{L}(E,F)$$

(réf. Cartan Cdiff p22, p34)

d) Trouver que $(Isom(E), \circ)$ est un groupe topologique.

---

a) Soit $u_0 \in Isom(E,F)$. $u_0^{-1} \circ u = Id - v$ est inversible dès que $\|v\| < 1$.

On a : $\|v\| = \| Id - u_0^{-1} u \| = \| u_0^{-1} (u_0 - u) \| \leq \|u_0^{-1}\| \, \|u_0 - u\|$

Ainsi $\|u - u_0\| < \dfrac{1}{\|u_0^{-1}\|} \Rightarrow u_0^{-1} \circ u$ inversible $\Rightarrow u$ inversible

ce qui prouve que $Isom(E,F)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E,F)$

NB : On obtient m̂ l'expression de u^{-1} pour $\|u - u_0\| < \dfrac{1}{\|u_0^{-1}\|}$:

$$\underbrace{(u_0^{-1} \circ u)^{-1}}_{u^{-1} \circ u_0} = (Id - v)^{-1} = \sum_{k \geq 0} v^k \Rightarrow u^{-1} = \sum_{k \geq 0} (Id - u_0^{-1} u)^k \circ u_0^{-1} .$$

b) Avec les notations du a) :

$$u_0^{-1} u = Id - v \Rightarrow u = u_0 (1 - v) \Rightarrow u^{-1} - u_0^{-1} = (1-v)^{-1} u_0^{-1} - u_0^{-1}$$

$$= \left((1-v)^{-1} - 1 \right) u_0^{-1} \quad \text{dès que } \|u - u_0\| < \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}$$

d'où $\|u^{-1} - u_0^{-1}\| \leq \|u_0^{-1}\| \, \| \underbrace{(1-v)^{-1} - 1}_{= \sum_{k \geq 0} v^k - 1 = \sum_{k \geq 1} v^k} \| \leq \|u_0^{-1}\| . \sum_{k \geq 1} \|v\|^k = \|u_0^{-1}\| . \dfrac{\|v\|}{1 - \|v\|}$

De $\|v\| \leq \|u_0^{-1}\| \, \|u-u_0\|$, on déduit

$$\|u^{-1}-u_0^{-1}\| \leq \frac{\|u_0^{-1}\|^2}{1-\|v\|} \, \|u-u_0\| \leq \frac{\|u_0^{-1}\|^2}{\frac{1}{2}} \|u-u_0\|$$

dès que $\|u-u_0\| \leq \dfrac{1}{2\|u_0^{-1}\|}$. D'où la continuité de φ.

c)

* Il faut montrer que :

$$\Delta(h) = \| \varphi(u+h) - \varphi(u) - u^{-1}hu^{-1} \| \leq \varepsilon \|h\| \qquad \text{pour } \|h\| < \eta .$$

On a :

$$\Delta(h) = \| (u+h)^{-1} - u^{-1} - u^{-1}hu^{-1} \|$$

et $(u+h)^{-1} = \left((1+hu^{-1})u \right)^{-1} = u^{-1}(1+hu^{-1})^{-1} = u^{-1} \sum_{k\geq 0} (hu^{-1})^k$ pour $\|hu^{-1}\| < 1$, ie dès que $\|h\| < \dfrac{1}{\|u^{-1}\|}$

Sous cette hyp., on aura :

$$\Delta(h) = \left\| u^{-1} \sum_{k\geq 0} (hu^{-1})^k - u^{-1} - u^{-1}hu^{-1} \right\| = \left\| \sum_{k\geq 2} (hu^{-1})^k \right\| \leq \frac{\|hu^{-1}\|^2}{1-\|hu^{-1}\|} = \frac{\|u^{-1}\|^2}{1-\|hu^{-1}\|} \cdot \|h\|^2$$

et $1-\|hu^{-1}\| \geq \frac{1}{2} \iff \|hu^{-1}\| \leq \frac{1}{2} \Leftarrow \|h\| \leq \dfrac{1}{2\|u^{-1}\|}$

Pour $\|h\| \leq \dfrac{1}{2\|u^{-1}\|}$, on aura donc :

$$\Delta(h) \leq 2 \|u^{-1}\|^2 \|h\|^2$$

d'où la différentiabilité de φ en u.

* φ est C^1 sur $Isom(E,F)$: Il faut prouver que

$$d\varphi : Isom(E,F) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E,F), \mathcal{L}(E,F))$$
$$u \longmapsto d\varphi(u) \;/\; d\varphi(u)h = u^{-1}\underbrace{h}_{\in \mathcal{L}(E,F)}u^{-1}$$

est continue.

L'application $\Psi : \mathcal{L}(F,E) \times \mathcal{L}(F,E) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E,F), \mathcal{L}(E,F))$

$$(v, w) \longmapsto (h \mapsto v \circ h \circ w)$$

est bilinéaire, continue car $\forall h \; \|v\circ h\circ w\| \leq \|v\| \, \|h\| \, \|w\|$

d'où $\|\Psi(v,w)\| \leq \|v\| \, \|w\|$.

…/…

$d\varphi(u) = \Psi(u^{-1}, u^{-1}) = \Psi \circ \tilde{\varphi}(u)$ où $\tilde{\varphi} : \begin{array}{ccc} Isom(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(F,E) \times \mathcal{L}(F,E) \\ u & \longmapsto & (u^{-1}, u^{-1}) \end{array}$

Soit $d\varphi = \Psi \circ \tilde{\varphi}$. $d\varphi$ est continue comme composée de 2 appl. continues.

d) $(G, .)$ est un groupe topologique ssi les applications définissant la structure de groupe de G, à savoir :

$u \longmapsto u^{-1}$

$(u,v) \longmapsto u.v$

sont continues (sur G ou $G \times G$).

On a vu que $\varphi : \begin{array}{ccc} Isom(E,E) & \longrightarrow & Isom(E,E) \\ u & \longmapsto & u^{-1} \end{array}$ était continue au b).

Montrons que $\Xi : \begin{array}{ccc} (Isom(E,E))^2 & \longrightarrow & Isom(E,E) \\ (u,v) & \longmapsto & u \circ v \end{array}$ est continue.

C'est facile car Ξ est bilinéaire et $\|\Xi(u,v)\| = \|u \circ v\| \leq \|u\| \|v\| \quad \forall u, v$.

NB : a) On peut aussi le redémontrer rapidement :

$\|uv - u_0 v_0\| \leq \|v\| \, \|u - u_0\| + \|u_0\| \, \|v - v_0\|$

b) $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ = <u>algèbre de Banach</u> (dès que E est un Banach)

ce qui signifie que
* $(\mathcal{L}(E), +, .)$ est un $\mathbb{R}$-e.v
  $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau
  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall u, v \in \mathcal{L}(E) \quad (\lambda u) \circ v = \lambda (u \circ v) = u \circ (\lambda v)$ } Algèbre

* $\mathcal{L}(E)$ est un ev normé par $\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$
  $\|Id\| = 1$
  $\|u \circ v\| \leq \|u\| \|v\|$ } Algèbre normée

* $\mathcal{L}(E)$ est un e.v.n. complet pour la norme $\| \ \|$ } Algèbre de Banach

(contexte : Ramis III § 1.5)

Extrémums de $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

La CN d'extrémum est :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12 = 0 \Rightarrow xy = 2 \Rightarrow y = \dfrac{2}{x} \end{cases}$$

d'où $3x^2 + 3\dfrac{4}{x^2} - 15 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$\Delta = 9 \quad x^2 = \begin{cases} 4 \\ \text{ou} \\ 1 \end{cases}$ donc $x = \pm 2$ ou ± 1.

Il y a 4 pts singuliers pour f : $(x,y) = (\pm 2, \pm 1)$ ou $(\pm 1, \pm 2)$

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y \end{cases}$$

• En $(x,y) = (2,1)$, $\begin{cases} r = t = 12 \\ s = 6 \end{cases}$ $\quad rt - s^2 = 144 - 36 = 108 > 0$ et $r > 0$

donc $d^2f(2,1)h^2$ est une forme quadratique définie positive. f admet un minimum relatif en $(2,1)$.

• En $(x,y) = (-2,-1)$, $\begin{cases} r = t = -12 \\ s = -6 \end{cases}$ $\quad rt - s^2 = 108 > 0$ et $r < 0$.

f admet un maximum relatif strict en $(-2,-1)$

• En $(x,y) = (\pm 1, \pm 2)$, $\begin{cases} r = t = \pm 6 \\ s = \pm 12 \end{cases}$ $\quad rt - s^2 = 36 - 144 < 0$ donc f

n'admet pas d'extrémum en ces pts.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$

Mq f est continue en O, admet des dérivées partielles en $(0,0)$ mais n'est pas différentiable en ce point.

---

* La continuité en O provient de :

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = |r\cos^2\theta\sin\theta| \leq |r| \leq \varepsilon \quad \text{dès que } |r| \leq \varepsilon.$$

* f admet des dérivées partielles en O car :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0 \end{cases}$$

* La différentiabilité de f en $(0,0)$ équivaut à :

$$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad \|(x,y)\| < \eta \Rightarrow \|f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)(x,y)\| \leq \varepsilon \|(x,y)\|$$

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} - ax - by \right| \leq \varepsilon \sqrt{x^2+y^2}$$

En faisant $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, on obtient la condition équivalente :

$$|\cos^2\theta\sin\theta - a\cos\theta - b\sin\theta| \leq \varepsilon \qquad \forall \varepsilon \geq 0$$

donc $\cos^2\theta\sin\theta - a\cos\theta - b\sin\theta = 0 \quad \forall\theta$, ce qui est absurde.

NB : f est continûment différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ car admet des dérivées partielles continues en tout point (x,y) distinct de $(0,0)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

Les dérivées partielles ne seront pas continues en O, comme on le vérifie :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = 2\cos\theta\sin^3\theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos^4\theta - \cos^2\theta\sin^2\theta = \cos^2\theta . \cos 2\theta.$$

X ensemble
E evn
$\mathcal{B} = B(X,E) =$ ens. des fcts bornées de X dans E.
$\mathcal{B} \subset E^X$ et $\mathcal{B} = \{ f \in E^X \ / \ \|f\|_\infty \doteq \sup_{x \in X} \|f(x)\| < \infty \}$

E^X est un ev. $\mathcal{B}$ est un sev de E^X, normé par $\| \ \|_\infty$.

E Banach $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ Banach

preuve :
($\Rightarrow$) Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $\mathcal{B}$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \qquad n, p > N \Rightarrow \quad \|f_n - f_p\|_\infty < \varepsilon$

$\sup_{x \in X} \|f_n(x) - f_p(x)\| < \varepsilon$

$(f_n(x))_n$ est donc une suite de Cauchy de E, complet, donc converge vers un élément $f(x) \in E$. On définit ainsi une fct $f \in E^X$.

• <u>f est bornée et $\lim f_n = f$</u> :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \qquad n, p > N \quad \forall x \in X \quad \|f_n(x) - f_p(x)\| < \varepsilon$

Fixons $n > N$ et $x \in X$, et faisons tendre p vers $+\infty$. On obtient :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \qquad n > N \quad \forall x \in X \quad \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \qquad (*)$

ce qui prouve que f_n converge vers f pour $\| \ \|_\infty$

$(*)$ montre aussi que $f_n - f$ est bornée sur X, donc il en sera de même de $f = (f - f_n) + f_n$.

<u>Ccl</u> : $(f_n)_n$ converge vers $f \in \mathcal{B}$ pour $\| \ \|_\infty$.

($\Leftarrow$) Si (x_n) est une suite de Cauchy de E, on pose : $f_n(x) \doteq x_n \quad \forall x \in X$.
La suite de fcts constantes $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathcal{B}$, donc converge vers $f \in \mathcal{B}$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \qquad n > N \qquad \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \qquad (\text{ie} \quad \forall x \in X \quad \|x_n - f(x)\| < \varepsilon)$

On a montré que $(x_n)_n$ tend vers $f(x)$ dans E (pour x fixé quelconque, ce qui montre au passage que f est une application constante).

a) Mq tte application multilinéaire continue $f : E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow F$ d'un produit d'e.v.n. dans un e.v.n est de classe C^∞, et que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$:

$$df(x_1, \ldots, x_n)(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

b) Donnons nous un e.v.n. E et n applications différentiables $g_i : E \longrightarrow E_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(g_1(x), \ldots, g_n(x)) \end{aligned}$$

est différentiable et calculer sa différentielle en $x \in E$.

c) Application : Donner des exemples d'application du b) (On pourra penser aux fonctions :

$t \mapsto (\vec{u}(t) | \vec{v}(t))$; $t \mapsto \vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t)$; $t \mapsto \det_e (x_1(t), \ldots, x_n(t))$

$t \mapsto f_1(t) . f_2(t) \ldots f_n(t)$ quand $f_i(t) \in \mathbb{R}$.)

---

a) Chaque application partielle $f_i : \begin{aligned} E_i &\longrightarrow F \\ h_i &\longmapsto f(x_1, \ldots, h_i, \ldots, x_n) \end{aligned}$ est linéaire continue, donc différentiable et $\partial_i f(x_1, \ldots, x_n) = df_i(x_i) = f_i$.

Les dérivées partielles existent donc en tout point $(x_1, \ldots, x_n)$. Si l'on montre qu'elles sont continues sur $E_1 \times \ldots \times E_n$, on pourra conclure à la différentiabilité de f (et même à son appartenance à la classe C^1).

On a :

$$E_1 \times \dots \times E_n \xrightarrow{\partial_i f} \mathcal{L}(E_i, F)$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto f_i = f(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_i, \dots, x_n)$$

$\partial_i f$ sera bien continue comme composée de la projection (continue) :

$$p : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \dots \times E_n$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

suivie de g :

$$g : E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \dots \times E_n \longrightarrow \mathcal{L}(E_i, F)$$
$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

qui est continue puisque $(n-1)$-linéaire et vérifiant :

$$\| f(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_n) \| \leq \|f\| \, \|x_1\| \dots \|x_{i-1}\| \, \|x_{i+1}\| \dots \|x_n\|$$

(puisque $\|f(x_1, \dots, x_n)\| \leq \|f\| \, \|x_1\| \dots \|x_n\|$ par hypothèse !)

<u>Ccl</u> : f est de classe C^1 et :

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x) \circ dx_i$$

ou encore :

$$\boxed{df(x)\,h = \sum_{i=1}^{n} f(x_1, \dots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}$$

(où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $h = (h_1, \dots, h_n)$)

b) Posons

$$g : E \longrightarrow E_1 \times \dots \times E_n$$
$$x \longmapsto (g_1(x), \dots, g_n(x))$$

$f \circ g$ sera différentiable comme composée de 2 appl. différentiables, et :

$$d(f \circ g)(x) = df(g(x)) \circ dg(x)$$

$$d(f \circ g)(x)\,h = df(g_1(x), \dots, g_n(x)) \, (dg_1(x)h, \dots, dg_n(x)h)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(g_1(x), \dots, g_{i-1}(x), dg_i(x)h, g_{i+1}(x), \dots, g_n(x))$$

que l'on peut retenir ainsi :

$$\boxed{d(f(g_1, \dots, g_n)) = \sum_{i=1}^{n} f(g_1, \dots, g_{i-1}, dg_i, g_{i+1}, \dots, g_n)}$$

c)

1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des appl. diff. d'un e.v.n H dans un evn E qui sera en fait :

- un préhilbertien réel (pour définir φ)
- un espace euclidien orienté de dimension 3 (pour ψ).

On considère :

$$\begin{array}{rcl} H & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (\vec{u}(t) | \vec{v}(t)) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} H & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t) \end{array}$$

Ces appl. sont diff. et :

$$d\varphi(t)h = (\vec{u}(t) | d\vec{v}(t)h) + (d\vec{u}(t)h | \vec{v}(t))$$
$$d\psi(t)h = \vec{u}(t) \wedge d\vec{v}(t)h + d\vec{u}(t)h \wedge \vec{v}(t)$$

Si $H = \mathbb{R}$, $d\varphi(t)h = \varphi'(t)h$ et l'on obtient les dérivées :

$$((\vec{u}(t) | \vec{v}(t)))' = (\vec{u}(t) | \vec{v}'(t)) + (\vec{u}'(t) | \vec{v}(t))$$
$$(\vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t))' = \vec{u}(t) \wedge \vec{v}'(t) + \vec{u}'(t) \wedge \vec{v}(t)$$

2) Si $x_1, \dots, x_n$ sont des applications diff. de l'evn H dans l'espace euclidien E de dimension n, on peut considérer l'application :

$$\begin{array}{rrcl} \xi : & H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \det(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{array}$$

où $\det(., \dots, .)$ désigne le déterminant dans une base qque, fixée, de E.

Le b) montre que ξ est différentiable et que :

$$d\xi(t)h = \sum_{i=1}^{n} \det(x_1(t), \dots, x_{i-1}(t), dx_i(t)h, x_{i+1}(t), \dots, x_n(t))$$

Si $H = \mathbb{R}$, cette formule devient :

$$\xi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det(x_1(t), \dots, x_{i-1}(t), x_i'(t), x_{i+1}(t), \dots, x_n(t))$$

3) Soient E un evn et $f_i : E \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq n)$ n fcts différentiables à valeurs réelles. On peut considérer le produit

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto f_1(t) \dots f_n(t)$$

f est C^∞ et :

$$df(t)h = \sum_{i=1}^{n} f_1(t) \dots f_{i-1}(t) \left(df_i(t)h \right) f_{i+1}(t) \dots f_n(t)$$

soit, si $E = \mathbb{R}$:

$$f'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_1(t) \dots f_{i-1}(t) f_i'(t) f_{i+1}(t) \dots f_n(t)$$

On a retrouvé la formule bien connue $(f_1 \cdots f_n)' = \sum_{i=1}^{n} f_1 \cdots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \cdots f_n$.

Soit $\begin{cases} g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \\ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$ définie et différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Montrer de 2 façons différentes que $fg : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable sur U et que :

a) $d(fg) = f\,dg + g\,df$

b) $d(f_1 \cdots f_m) = \sum_{i=1}^{m} f_1 \cdots \hat{f_i} \cdots f_m \, df_i$ (où $m \in \mathbb{N}^*$)

c) $d(f^m) = m f^{m-1} df$ (où $m \in \mathbb{N}^*$)

---

a) $\Rightarrow$ b) et c) est trivial.

• 1re méthode : Utilisation de la définition

Preuve de a) : pour x fixé dans U,

$$\xi \doteq \| f(x+h) g(x+h) - f(x) g(x) - (f(x)\, dg(x)(h) + g(x)\, df(x)(h)) \|$$

$$= \| f(x+h) g(x+h) - f(x+h) g(x) + f(x+h) g(x) - f(x) g(x) - (\quad) \|$$

$$\leq \underbrace{\| f(x+h) g(x+h) - f(x+h) g(x) - f(x) dg(x)(h) \|}_{A} + \underbrace{\| f(x+h) g(x) - f(x) g(x) - g(x) df(x)(h) \|}_{B}$$

$$A \leq \underbrace{\| f(x+h) [g(x+h) - g(x) - dg(x)(h)] \|}_{=\ \underbrace{|f(x+h)|}_{\text{borné pour } \|h\|<\eta}\ \underbrace{\| g(x+h) - g(x) - dg(x)(h) \|}_{\leq \varepsilon \|h\| \text{ si } \|h\| < \eta}} + \underbrace{\| (f(x+h) - f(x))\, dg(x)(h) \|}_{=\ \underbrace{|f(x+h) - f(x)|}_{\leq \varepsilon \text{ si } \|h\|<\eta} .\ \underbrace{\| dg(x)(h) \|}_{\leq \|dg(x)\| \|h\|}}$$

- $|f(x+h)|$ borné ~~au voisinage de x~~ pour $\|h\| < \eta$ (continuité de f en x)
- $\| g(x+h) - g(x) - dg(x)(h) \| \leq \varepsilon \|h\|$ si $\|h\| < \eta$ (g étant diff. en x)
- $|f(x+h) - f(x)| \leq \varepsilon$ si $\|h\| < \eta$ car f est cont. en x
- $\| dg(x)(h) \| \leq \|dg(x)\| \|h\|$ puisque $dg(x)$ est une appl. lin. continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

$$B = \underbrace{|g(x)|}_{\text{cte}} . \underbrace{\| f(x+h) - f(x) - df(x)(h) \|}_{\leq \varepsilon \|h\| \text{ si } \|h\| < \eta}$$

Ccl :

$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad \|h\| < \eta \Rightarrow \xi \leq \varepsilon \|h\|$

traduit bien la différentiabilité de $f.g$ en x et l'identité a). □

in

• <u>2-méthode</u> : on peut supposer $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ quitte à troquer g pour ses fonctions coordonnées $g_1, \dots, g_p$.

$$d(fg) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(fg)}{\partial x_i} \, dx_i \qquad (1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) dx_i$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx_i \right) g + f \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} \, dx_i \right)$$

$$= df \cdot g + f \cdot dg$$

Formellement, l'identité est vraie, mais l'on ne peut écrire (1) que si l'on a auparavant démontré que $f \cdot g$ était différentiable en tt pt de U.
Ainsi, on a 2 possibilités :

- soit on utilise la 1-méthode pour prouver cette différentiabilité.
- soit on fait l'hypothèse supplémentaire "f et g sont de classe C^1 sur U", ce qui entraîne l'existence et la continuité des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial g}{\partial x_i}$, et donc aussi des dérivées partielles $\frac{\partial (fg)}{\partial x_i}$. Cela entraîne la différentiabilité de fg (et m̂ son appartenance à la classe C^1).

Coordonnées polaires :

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

1°/ Déterminer la matrice jacobienne de φ

2°/ Exprimer r en fct de x et y.
En notant simplement dr la différentielle de r au point (x,y), montrer que $r\,dr = x\,dx + y\,dy$. En déduire seulement après $\frac{\partial r}{\partial x}$ et $\frac{\partial r}{\partial y}$.

3°/ Déterminer un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ tq la restriction de φ à U, notée φ_0, soit un homéomorphisme de U sur $\varphi(U)$.
Expliciter φ_0^{-1}.

4°/ Mq φ_0^{-1} est différentiable et calculer $d\varphi_0^{-1}(x,y)$ de deux façons différentes.

TD4

1.8

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(r,\theta) \longmapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

1°/ Matrice jacobienne de φ :

$$J\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

2°/ • $x^2+y^2=r^2$ donc $r=\pm\sqrt{x^2+y^2}$. En général, on choisit $\boxed{r=\sqrt{x^2+y^2}}$

• Rappelons :

Th : Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiables en $x \in \mathbb{R}^n$, alors $f.g$ est différentiable en x et $\boxed{d(fg)(x) = f(x).dg(x) + g(x).df(x)}$

En particulier $d(f^2) = 2f.df$.

En différentiant $r^2 = x^2+y^2$, on obtient :

$$2r\,dr = 2x\,dx + 2y\,dy$$
$$r\,dr = x\,dx + y\,dy$$

De $dr = \frac{x}{r}dx + \frac{y}{r}dy$ on déduit $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

que l'on pouvait aussi calculer directement.

3°/ $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=r^2 \Rightarrow r = \pm\sqrt{x^2+y^2}$

Si l'on désire l'unicité des antécédents, on doit choisir le signe de r. Par exemple $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Le point $(x,y)=(0,0)$ admet une infinité d'antécédents (les $(r,\theta)=(0,\theta)$ $\forall\theta\in\mathbb{R}$). On l'exclut. Alors :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{cases}$$

} détermine parfaitement θ modulo 2π

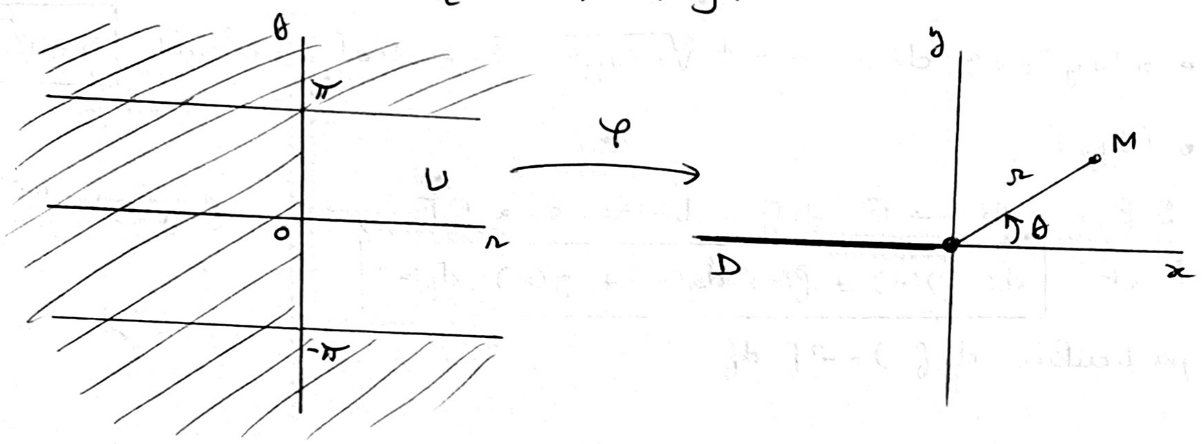
et l'on peut affirmer que :

$$\varphi_0 : U \longrightarrow \varphi(U)$$
$$(r,\theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

est une <u>bijection</u> de $U = \{(r,\theta) \,/\, r>0 \text{ et } -\pi < \theta < \pi\}$

sur $\varphi(U) = \mathbb{R}^2 \setminus D$

où D est la demi-droite $\{(x,0) \,/\, x \leq 0\}$.



1) <u>φ est différentiable</u> (<u>et même C^∞</u>) sur U car les fcts $r\cos\theta$ et $r\sin\theta$ sont de classe C^∞ sur cet ouvert.

2) <u>Explicitons φ_0^{-1}</u> :

Il s'agit de trouver $\theta \in]-\pi,\pi[$ tel que :

$$(*) \quad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases} \qquad \text{où } r = \sqrt{x^2+y^2}$$

On sait qu'un tel θ existe et est unique modulo 2π. Exo : (cf p3)

$\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2} = \dfrac{y}{r}$ où $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$

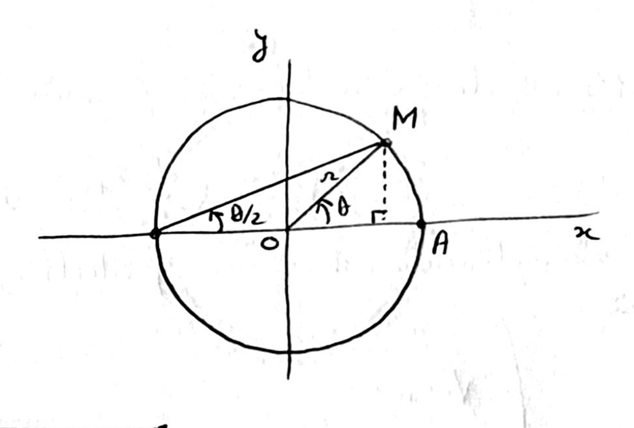
$yt^2 - 2rt + y = 0$ (supposons $y \neq 0$)

$\Delta' = r^2 - y^2 = x^2$

$t = \dfrac{r \pm |x|}{y}$

d'où $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{r \pm x}{y}$

Faisons la construction :



On déduit :

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{y}{x+r}$$

$$\boxed{\theta = 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \in \,]-\pi,\pi[}$$

On a trouvé :

$$f_0^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus D \longrightarrow U$$
$$(x,y) \longmapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}\,,\ 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

et il est facile de voir que les 2 fcts composantes de f_0^{-1} sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus D$.

<u>Ccl</u> : <u>$f_0 : U \to \mathbb{R}^2\setminus D$ est un C^∞- difféomorphisme</u>

4°/. On a déjà montré que f_0^{-1} était de classe C^∞ sur U. Voici une autre méthode : $f_0 : U \to \mathbb{R}^2 \setminus D$ est de classe C^∞, bijective, et de différentielle $df_0(r,\theta)$ inversible pour tout $(r,\theta) \in U$ (car $\det(df_0(r,\theta)) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \neq 0$). C'est donc un C^∞- difféomorphisme local en chaque pt de U. Comme f_0 est bijective, f_0^{-1} sera bien un C^∞- difféomorphisme global de $\mathbb{R}^2\setminus D$ sur U.

- <u>Calcul de $J(f_0^{-1})(x,y)$:</u>

1-méthode : on utilise la formule explicite

$$\varphi^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Après simplification des dérivées partielles, on trouve

$$d\varphi^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

2-méthode : $\varphi \circ \varphi^{-1} = Id \Rightarrow d\varphi(\varphi^{-1}(x,y)) \circ d\varphi^{-1}(x,y) = Id$

$$\Rightarrow d\varphi^{-1}(x,y) = [d\varphi(\varphi^{-1}(x,y))]^{-1}$$

on rappelle :

$$\begin{cases} d\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \\ (r,\theta) = \varphi^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{cases}$$

et que $[d\varphi(r,\theta)]^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

De sorte que l'on retrouve

$$d\varphi^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix}$$

Soit E un espace préhilbertien réel. On note $(x|y)$ le produit scalaire et on munit $E\times E$ de la norme $\|(a,b)\| = \|a\| + \|b\|$.

a) Mq l'application $\Phi : E\times E \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(x,y) = (x|y)$ est de classe C^∞ sur $E\times E$, et calculer sa différentielle.

b) Soient :

$f : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|^2$; $g : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ et $\nu : E\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\|x\|}$

Mq f est de classe C^∞ sur E, que g et ν sont de classe C^∞ sur $E\setminus\{0\}$ et calculer leurs différentielles.

NB : Fabien avait marqué sur son formulaire, sur le tableau de sa chambre, les bonnes formules :

- $d((.|.))(x,y)(h,k) = (x,k) + (h,y)$
- $d(\|.\|^2)(x).h = 2(x|h)$
- $d(\|.\|)(x)(h) = \dfrac{(x|h)}{\|x\|}$
- $d\left(\dfrac{1}{\|.\|}\right)(x)(h) = -\dfrac{(x|h)}{\|x\|^3}$

a) L'application Φ est bilinéaire continue (car d'après Cauchy-Schwarz : $|(x|y)| \leq \|x\|\,\|y\|$), donc il suffira de prouver :

Théorème : Si $\Phi : E\times E \to \mathbb{R}$ est bilinéaire continue, elle est de classe C^∞ et $d\Phi(x,y)(h,k) = \Phi(x,k) + \Phi(h,y)$

preuve :

* $\Delta = \|\Phi(x+h,y+k) - \Phi(x,y) - \Phi(x,k) - \Phi(h,y)\| = \|\Phi(h,k)\| \leq \|\Phi\|\,\|h\|\,\|k\|$

donc $\Delta \leq \|\Phi\|\,(\|h\|+\|k\|)^2 = \|\Phi\|.\|(h,k)\|^2$ et $\Delta = o(\|(h,k)\|)$

L'application $\ell : E\times E \to \mathbb{R}$, $(h,k) \mapsto \Phi(x,k) + \Phi(h,y)$ est, pour (x,y) fixé, linéaire, continue car :

$\|\ell(h,k)\| \leq \|\Phi(x,k)\| + \|\Phi(h,y)\| \leq \|\Phi\|\,(\|x\|\,\|k\| + \|h\|\,\|y\|)$

$\leq \|\Phi\|\,(\|x\|+\|y\|)(\|h\|+\|k\|)$

$\|\ell(h,k)\| \leq \|\Phi\|.\|(x,y)\|.\|(h,k)\|$ (1)

ℓ est donc la différentielle de Φ en (x,y) : $d\Phi(x,y) = \ell$.

(réf. Serfati III.5.9)

* $d\Phi : E\times E \longrightarrow \mathcal{L}(E\times E, \mathbb{R})$ est linéaire, et continue puisque
$(x,y) \longmapsto d\Phi(x,y)$

d'après (1) : $\|d\Phi(x,y)\| \leq \|\Phi\| \, \|(x,y)\|$

On en déduit que Φ est de classe C^1, et que la différentielle de $d\Phi$ en un point (x,y) est elle même :

$$\forall (x,y) \in E\times E \qquad d^2\Phi(x,y) = d\Phi$$

L'application $d^2\Phi : E\times E \longrightarrow \mathcal{L}(E\times E, \mathcal{L}(E\times E, G))$ est donc constante, donc C^∞ et de différentielles successives nulles.

<u>Résumons nous</u> :

Φ est C^∞ et : $\begin{cases} d\Phi(x,y)(h,k) = \Phi(x,k) + \Phi(h,y) \\ d^2\Phi(x,y) = d\Phi \\ d^k\Phi = 0 \quad \text{si } k>2. \end{cases}$

b) * $f(x) = \Phi(x,x)$ est C^∞ comme composée de 2 fcts C^∞ :

$$E \xrightarrow{i} E^2 \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (x,x)$$

$df(x) = d\Phi(i(x)) \circ di(x) = d\Phi(x,x) \circ i$ car i est linéaire continue, donc $di(x) = i \quad \forall x$.

Soit $df(x)h = d\Phi(x,x)(h,h) = \Phi(x,h) + \Phi(h,x) = 2\,\Phi(x,h)$

$$\boxed{df(x)h = 2\,\Phi(x,h)}$$

* $g = \sqrt{f}$ est C^∞ sur $E\setminus\{0\}$ comme composée de fcts C^∞, et :

$dg(x) = d(\sqrt{\ })(f(x)) \circ df(x)$

$dg(x)h = d(\sqrt{\ })(f(x))(2\,\Phi(x,h))$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot 2\,\Phi(x,h) = \dfrac{\Phi(x,h)}{\|x\|}$

$$\boxed{dg(x)h = \frac{\Phi(x,h)}{\|x\|}}$$

NB : En dimension finie, on retrouve ce résultat ainsi :

$$g(x) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$dg(x) = \frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}}\, dx_1 + \dots \Rightarrow dg(x)h = \frac{x_1h_1 + \dots + x_nh_n}{\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}} = \frac{(x|h)}{\|x\|}$$

* On compose à nouveau. Soit $\varrho : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $t \longmapsto \frac{1}{t}$.

ϱ est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, donc $v = \varrho \circ g$ sera C^∞ sur $E \setminus \{0\}$ et :

$$dv(x) = d\varrho(g(x)) \circ dg(x)$$

$$dv(x)h = -\frac{1}{(g(x))^2} \cdot \frac{(x|h)}{\|x\|} = -\frac{(x|h)}{\|x\|^3}$$

$$\boxed{dv(x)h = -\frac{(x|h)}{\|x\|^3}}$$

a) E, F, G sont des e.v.n. sur $\mathbb{R}$.
Soit $\varphi : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire continue. Montrer que φ est de classe C^∞ sur $E \times F$ et calculer ses différentielles successives.

b) Si $f : H \longrightarrow E \times F$, $x \longmapsto (f_1(x), f_2(x))$ est différentiable sur l'e.v.n. H,
mq l'application $F : H \longrightarrow G$ définie par $F(x) = \varphi(f_1(x), f_2(x))$ est différentiable et que :

$$\forall x \in H \qquad dF(x)h = \varphi(f_1(x), df_2(x)h) + \varphi(df_1(x)h, f_2(x))$$

c) Applications : Étudier la différentiabilité et exhiber les différentielles des applications suivantes :

1) $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto (\vec{u}(t) | \vec{v}(t))$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des appl. différentiables de $\mathbb{R}$ vers un espace préhilbertien réel E dont le produit scalaire est noté $(.|.)$

2) $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t)$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont différentiables de $\mathbb{R}$ vers un espace euclidien orienté E de dim. 3.

3) $F : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f_1(x) \cdot f_2(x)$ où $f_i : E \to \mathbb{R}$ sont différentiables de l'e.v.n. E sur $\mathbb{R}$.

---

a) $\Delta = \| \varphi(x+h, y+k) - \varphi(x,y) - \varphi(x,k) - \varphi(h,y) \| = \| \varphi(h,k) \| \leq M \|h\| \|k\|$
car φ est bilinéaire continue. $E \times F$ est structuré en e.v.n de façon canonique pour l'une des normes équivalentes $\|(x,y)\|_1 = \|x\| + \|y\|$ ou $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ ou encore $\|(x,y)\|_\infty = \operatorname{Sup}(\|x\|, \|y\|)$. Choisissons $\|(x,y)\| \doteq \|x\| + \|y\|$.

On a : $\Delta \leq M(\|h\| + \|k\|)^2 = M \|(h,k)\|^2$ donc $\Delta = o(\|(h,k)\|)$.

L'application $\ell : E \times F \longrightarrow G$, $(h,k) \longmapsto \varphi(x,k) + \varphi(h,y)$, pour (x,y) fixé,
est linéaire, continue car :

$$\|\ell(h,k)\| \leq \|\varphi(x,k)\| + \|\varphi(h,y)\| \leq \|\varphi\| \left(\|x\| \|k\| + \|h\| \|y\| \right)$$
$$\leq \|\varphi\| \left(\|x\| + \|y\| \right)\left(\|h\| + \|k\| \right)$$
$$\|\ell(h,k)\| \leq \|\varphi\| \, \|(x,y)\| \, \|(h,k)\| \qquad (1)$$

ℓ sera donc la différentielle de φ au point (x,y) :

$$\boxed{d\varphi(x,y)(h,k) = \varphi(x,k) + \varphi(h,y)} \qquad (2)$$

* $d\varphi : E\times F \longrightarrow \mathcal{L}(E\times F, G)$ est linéaire, continue car d'après (1) :
$\quad (x,y) \longmapsto d\varphi(x,y)$

$$\|d\varphi(x,y)\| \leq \|\varphi\| . \|(x,y)\| \qquad (\text{et donc } \|d\varphi\| \leq \|\varphi\|)$$

La différentielle de $d\varphi$ en tout point (x,y) sera donc elle-même :

$$\forall (x,y) \in E\times F \qquad d^2\varphi(x,y) = d\varphi$$

Autrement dit, φ est 2 fois différentiable, et $d^2\varphi$ est l'application constante :

$$d^2\varphi : E\times F \longrightarrow \mathcal{L}(E\times F, \mathcal{L}(E\times F, G))$$
$$(x,y) \longmapsto d\varphi$$

$d^2\varphi$ sera différentiable et $d^3\varphi = 0, \dots, d^k\varphi = 0$ pour tout $k > 2$.

b) F est différentiable comme composée de 2 fcts différentiables et :

$$dF(x) = d\varphi(f(x)) \circ df(x)$$
$$dF(x)h = d\varphi(f_1(x), f_2(x))(df_1(x)h, df_2(x)h)$$
$$= \varphi(f_1(x), df_2(x)h) + \varphi(df_1(x)h, f_2(x))$$

Formule que l'on peut retenir ainsi :

$$d(\varphi(f_1,f_2)) = \varphi(f_1, df_2) + \varphi(df_1, f_2)$$

c) Toutes ces appl. sont différentiables, et l'on a :

1) $dF(t)h = (\vec{u}(t) \mid d\vec{v}(t)h) + (d\vec{u}(t)h \mid \vec{v}(t))$

Ici $\vec{u} : \mathbb{R} \to E$ donc $d\vec{u}(t)(h) = \vec{u}'(t)h$ où $\vec{u}'(t)$ est le vecteur dérivé de $\vec{u}$ en t. On aura, avec des dérivées :

$$F'(t) = (\vec{u}(t) \mid \vec{v}'(t)) + (\vec{u}'(t) \mid \vec{v}(t))$$

2) De même :

$$F'(t) = \vec{u}(t) \wedge \vec{v}'(t) + \vec{u}'(t) \wedge \vec{v}(t)$$

3) Ici : $dF(t)h = f_1(t) \cdot df_2(t)h + df_1(t)h \cdot f_2(t)$

Si, de plus, $f_i : E = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fct réelle de variable réelle, alors $df_i(t).h = f_i'(t)h$ d'où :

$$\underbrace{F'(t)}_{(f_1 f_2)'(t)} = f_1(t) . f_2'(t) + f_1'(t) f_2(t)$$

On retrouve la formule bien connue !

Etudier la différentiabilité des fonctions f dans chacun des cas suivants et définir la différentielle :

a) $f(x,y) = e^{xy}(x+y)$ b) $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{pour } (x,0) \end{cases}$

a) Les dérivées partielles existent et sont continues, donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy$, avec

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy}(y^2+xy+1)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy}(x^2+xy+1)$

NB : Cela signifie que $df(x,y)(h,k) = e^{xy}(y^2+xy+1)\,h + e^{xy}(x^2+xy+1)\,k$

b) Notons $D = \{(x,y) / y=0\}$

* Continuité de f en $(x_0,0)$?

Si $(x,y) \notin D$, $f(x,y) = \rho^2 \sin^2\theta . \sin\left(\frac{x_0+\rho\cos\theta}{\rho\sin\theta}\right)$

$(x,y) = (x_0+\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$

$(x_0,0)$ ρ θ D

donc $|f(x,y)| \leq \rho^2$, et $|f(x,y) - f(x_0,0)| \leq \varepsilon$ sera assuré dès que $\rho^2 \leq \varepsilon$, ie $\rho \leq \sqrt{\varepsilon}$, ie $\|(x,y)-(x_0,0)\| < \sqrt{\varepsilon}$.

f est continue sur D. Etant C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus D$, f sera continue sur $\mathbb{R}^2$ entier.

NB :

1) Pas nécessaire d'avoir recours à $\rho\cos\theta, \rho\sin\theta$ pour conclure ici, même si cette méthode est très efficace. En effet :

$|f(x,y)| \leq y^2 \leq \sqrt{x^2+y^2}$ est trivial !

2) Si f vérifie :

$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad \|(h,k)\| \leq \eta \Rightarrow \|f((x,y)+(h,k)) - f(x,y) - l(h,k)\| \leq \varepsilon \|(h,k)\|$

pour une appl. linéaire l convenable, les dim. étant finies, l sera continue, ~~donc~~ et l'on déduit alors que f sera continue aussi.

On peut donc directement se poser la question suivante :

(réf. Deug 1-année 92-93)

* Différentiabilité en $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \cos \dfrac{x}{y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \sin \dfrac{x}{y} - x \cos \dfrac{x}{y} \end{cases}$$

Ces dérivées partielles existent et sont continues (comme fcts de (x,y)) sur $\mathbb{R}^2 \setminus D$. Un théorème du cours assure alors que <u>f est C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus D$</u>

<u>NB</u> : Ici, $\lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)$ n'existe pas dès que $x_0 \neq 0$, de sorte que même si $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$ existe, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ne sera pas continue en $(x_0,0)$.

* <u>Les dérivées partielles en $(x_0,0)$ sont-elles définies</u> ?

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,0)}{y - 0} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \frac{y^2 \sin \frac{x_0}{y}}{y} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x,0) - f(x_0,0)}{x - x_0} = 0$$

Les dérivées partielles existent bien en $(x_0,0)$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = 0$$

* <u>f est-elle différentiable en $(x_0,0)$</u> ? Si oui, on aurait nécessairement

$$df(x_0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)\,dy = 0$$

Nous n'avons qu'à vérifier que :

$$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad \|(h,k)\| < \eta \Rightarrow \| f(x_0+h, k) - f(x_0,0) \| \leq \varepsilon \|(h,k)\|$$

ie, pour $k \neq 0$:

$$\left| k^2 \sin \frac{x_0+h}{k} \right| \underset{(*)}{\leq} \varepsilon \|(h,k)\|$$

$(*)$ est vraie car $\left| k^2 \sin \frac{x_0+h}{k} \right| \leq k^2$, donc $(*)$ est entraîné par $k^2 \leq \varepsilon \sqrt{h^2+k^2}$, ie $|k| \leq \varepsilon \sqrt{1 + \left(\frac{h}{k}\right)^2}$, entraîné par $|k| \leq \varepsilon$, lui-m̂ entraîné par $\sqrt{h^2+k^2} = \|(h,k)\| \leq \varepsilon$.
<u>Ccl</u> : <u>f est différentiable en $(x_0,0)$ et $df(x_0,0) = 0$</u>

Mq $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ admet une dérivée selon tout vecteur, mais n'est pas différentiable en $(0,0)$.

* f est C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, donc admet une dérivée suivant tout vecteur en tout pt x de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, à savoir $\frac{\partial f}{\partial u}(x) = df(u)(x)$.

* En $(0,0)$:

Soit $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ un vecteur fixé non nul. La dérivée suivant le vecteur u en $O = (0,0)$ est la limite, si elle existe, du quotient $\frac{f(O+tu) - f(O)}{t}$ quand $t \to 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) \doteq \lim_{t \to 0} \frac{f(O+tu) - f(O)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(tu)}{t}$$

Soi $\frac{f(tu)}{t} = \frac{t^2 u_1^2 \cdot t u_2}{t(t^2 u_1^2 + t^2 u_2^2)} = \frac{u_1^2 u_2}{u_1^2 + u_2^2}$

de sorte que $\boxed{\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \frac{u_1^2 u_2}{u_1^2 + u_2^2}}$

* Ainsi les dérivées partielles de f en $(0,0)$ existent et valent :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial e_1}(0,0) = 0 & \text{où } e_1 = (1,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial e_2}(0,0) = 0 & e_2 = (0,1) \end{cases}$$

Si f était différentiable en O, on aurait

$$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad \|(h,k)\| < \eta \Rightarrow |f(h,k) - f(0,0)| < \varepsilon \|(h,k)\|$$

ie $\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{h^2 k}{(h^2+k^2)^{3/2}} = 0 \quad (*)$

Mais en posant $h = \rho \cos\theta$ et $k = \rho \sin\theta$,

$$\frac{h^2 k}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} = \cos^2\theta \sin\theta$$

d'où l'on déduit que $(*)$ est faux.

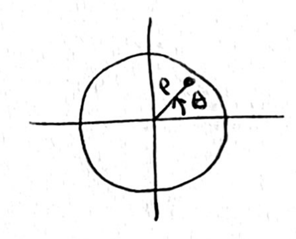
<u>NB</u> : On pouvait aussi conclure sans passer par (ρ, θ) en faisant $h = k$.

Etudier la continuité à l'origine des fonctions f définies sur $\mathbb{R}^2$

a) $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+2y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = \frac{1}{3} \end{cases}$

a) $f(x,y) = \dfrac{\rho^3(\cos^3\theta - \sin^3\theta)}{\rho^2} = \rho(\cos^3\theta - \sin^3\theta)$



donc $|f(x,y)| \leq 2\rho$.

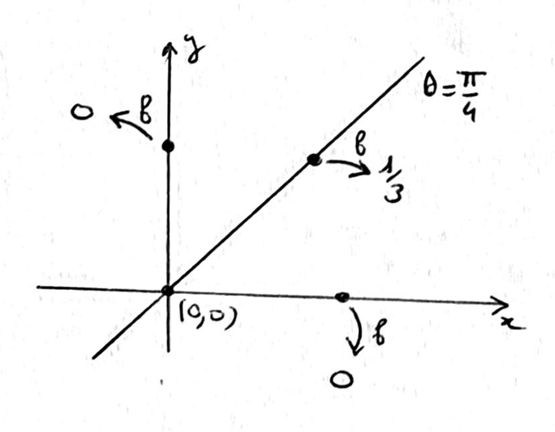
$|f(x,y)| \leq \varepsilon$ sera assuré dès que $2|\rho| < \varepsilon$, ie $|\rho| < \frac{\varepsilon}{2}$,
ie $\|(x,y)-(0,0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. f sera donc continue en (0,0).

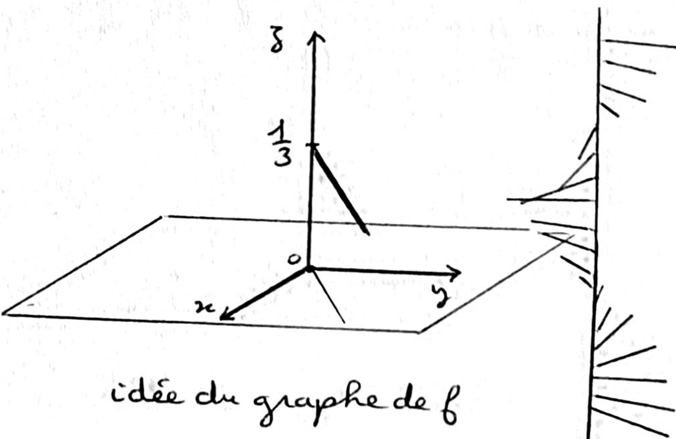
b) $f(x,y) = \dfrac{\rho^2 \sin\theta\cos\theta}{\rho^2(\cos^2\theta + 2\sin^2\theta)} = \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin^2\theta}$

Si $\theta = \frac{\pi}{4}$, $f(x,y) = \frac{1}{3}$ pour tous ρ.

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, $f(x,y) = 0$ pour tout ρ.

f ne sera donc pas continue en (0,0). En fait : f ne peut pas être prolongée par continuité en (0,0).





idée du graphe de f

Th : Inégalité des Accroissements Finis, version de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$

Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est continue sur $[a,b] \subset U$ et dérivable sur $]a,b[$, alors

$$\| f(b) - f(a) \|_\infty \leq \left(\sup_i \left(\sup_{c \in]a,b[} \| \nabla f_i(c) \|_2 \right) \right) . \| b-a \|_2$$

où $f = (f_1, \dots, f_p)$

$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ désigne la norme de $\mathbb{R}^n$ dérivant du produit scalaire canonique

$\|y\|_\infty = \sup_j |y_j|$

$\nabla f_i(c) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(c), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(c) \right)$

preuve :

La version classique du Théorème est :

$$\| f(b) - f(a) \|_\infty \leq \sup_{c \in]a,b[} \| df(c) \| . \| b-a \|_2$$

et tout revient à prouver que

$$\| df(c) \| = \sup_i \| \nabla f_i(c) \|_2$$

La norme opérateur $\| df(c) \|$ est ici :

$$\| df(c) \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\| df(c)(x) \|_\infty}{\|x\|_2} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sup_i | df_i(c)(x) |}{\|x\|_2}$$

$$= \sup_i \sup_{x \neq 0} \frac{| df_i(c)(x) |}{\|x\|_2}$$

puisque $df(c)(x) = (df_1(c)(x), \dots, df_p(c)(x))$. Le lemme suivant permet de conclure :

Lemme : Si l'appl. linéaire $\ell : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

vérifie $\quad \| \ell \| \doteq \sup_{x \neq 0} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|_2} = \| a \|_2 \quad$ où $\quad a \doteq (a_1, \dots, a_n)$

preuve du lemme : $\frac{|\ell(x)|}{\|x\|_2} = \frac{|a_1 x_1 + \dots + a_n x_n|}{\|x\|_2} = \frac{|a . x|}{\|x\|_2} \leq \|a\|_2$ d'après Cauchy-Schwarz, donc $\|\ell\| \leq \|a_2\|$

D'autre part $\frac{\ell(a)}{\|a\|_2} = \|a\|_2$ prouve que $\|\ell\| \geq \|a\|_2$ $\square$

a) Calculer les dérivées partielles premières et seconde des fonctions suivantes :

$f(x,y) = xy$ $\qquad$ $f(x,y) = \ln(xy)$ $\qquad$ $f(x,y) = \text{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$

b) Ecrire le développement limité à l'ordre 1 au point (1,1) de la fonction $f(x,y) = x\ln y + y\ln x$.

a) $f(x,y) = xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

$f(x,y) = \ln(xy)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$f(x,y) = \text{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

b) Taylor-Young à l'ordre 1 :

$$f(x,y) = f(1,1) + df(1,1)(x-1, y-1) + o(\|h\|) \quad \text{où } h = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

Ici $f(1,1) = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \ln y + \dfrac{y}{x} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \ln x + \dfrac{x}{y} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1 \end{cases}$$

donc $df(1,1)(x-1, y-1) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) \cdot (y-1)$

$= x + y - 2$

Ccl :

$$\boxed{f(x,y) = x + y - 2 + o(\|h\|)}$$

NB : cela peut encore s'écrire

$$f(x,y) = x + y - 2 + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \cdot \varepsilon(x,y)$$

avec $\lim\limits_{(x,y) \to (1,1)} \varepsilon(x,y) = 0$

Dérivée suivant une direction

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable en $x \in \mathbb{R}^n$.

1) Mq f admet une dérivée en x suivant n'importe quelle direction u, notée $D_u f(x)$ et que

$$D_u f(x) = df(x)(u)$$

2) Si $u = (1, 0, \dots, 0)$, à quoi est égal le nombre $D_u f(x)$?

---

1) Par définition, $D_u f(x)$ est la dérivée en 0 de l'application $t \longmapsto f(x+tu)$, ie :

$$D_u f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}$$

Prenons la différentielle de l'appl. composée :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\ \psi\ } & E = \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\ f\ } & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & x + tu & \longmapsto & f(x+tu) \end{array}$$

$$D_u f(x) \doteq (f \circ \psi)'(0) = df(\psi(0))(\psi'(0))$$

$$= df(x)(u)$$

2) Par déf. de $D_u f(x)$:

$$D_u f(x) = D_{(1,0,\dots,0)} f(x) \doteq \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1 + t, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{t} \doteq \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$$

Théorème de Poincaré :

D disque ouvert de $\mathbb{R}^2$

$\omega = P\,dx + Q\,dy$ = forme différentielle de degré 1 sur D

Si P et Q admettent des dérivées partielles en x et y continues sur D (ie si P et Q sont de classe C^1 sur D), alors :
(ie si ω est de classe C^1)

$$\exists f \quad df = \omega \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$\Updownarrow$ ω exacte (ou "totale") sur D

$\Updownarrow$ ω fermée sur D

(réf. [M] Couty-Ezra 67 pp 83-86)

NB : Le Th. de Schwarz énonce que "si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles secondes continues en a, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$". Dans le Th. préc., cela éclaire le sens ($\Rightarrow$) et permet de retenir la formule "$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$" définissant une forme fermée.

Version plus forte de ce Théorème :

D = ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^2$

ω = forme différentielle de degré 1 et de classe C^0 sur D

Alors :

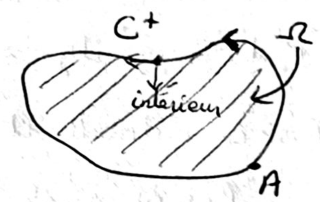
$$\omega \text{ exacte sur } D \quad \Longleftrightarrow \quad \omega \text{ fermée sur } D$$

([M] Couty-Ezra 67 p 364)

.../...

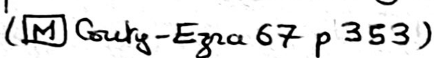
Formule de Green-Riemann :

$$\int_{C^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$



$C^+ = \partial \Omega$ = bord orienté de Ω

C^+ est un chemin fermé.


(M Gourdon-Ezra 67 p 353)

NB : Si $\omega = P\,dx + Q\,dy$ est exacte, $\int_{C^+} \omega = \int_{C^+} df = f(A) - f(A) = 0$

puisque ~~Marg.~~ C^+ est un chemin fermé

Cela permet de retenir le $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ dont la nullité signifie que ω est fermée.